研究ノート

会計情報に基づく現在価値関係

A Note on Accounting-Based Present-Value Relations

椎　葉　　　淳（大阪大学）
Atsushi Shiiba, Osaka University

論文要旨

本稿は、会計分野における現在価値関係に関する研究において基本となる現在価値恒等式について説明する。具体的には、Campbell–Shillerの現在価値恒等式とVuolteenahoの現在価値恒等式を示し、その導出方法を説明する。これらは、期待リターンが変動する状況を前提にしていること、および実証分析をおこなうことを念頭に変数の定常性を考慮して対数変換した変数を用いるとともに線形近似した式になっている点に特徴がある。現在価値関係に関する会計研究は、Vuolteenaho（2000，2002）によって会計情報に基づく現在価値恒等式が示されるとともに実証分析がおこなわれたことを契機に、近年増加してきている。しかしながら、Vuolteenaho（2000，2002）の論文は一見すると会計研究に対する含意が理解しづらいこともあり、日本においてはあまり普及していない。そこで本稿では、よく知られた企業価値評価モデルと対比できるように書きかえた式を示し、導出方法についても詳しく説明する。このことによって、Vuolteenahoの現在価値恒等式が会計研究に対して持つ重要性を説明する。

Summary

This research note explains the present-value identities behind the recent accounting research on present-value relations. In particular, I explain the derivations of the Campbell–Shiller and Vuolteenaho present-value identities. These identities allow for time-varying discount rates as opposed to the constant discount rates that are usually assumed in the so-called valuation models, including the discounted dividend model and residual income model. These identities also have empirically tractable properties such as the stationarity of basic variables in identities by using linear approximations of log variables. However, given the difficulty in understanding and interpreting the implications of these identities for accounting research, accounting studies on present-value relations are unpopular especially in Japan. I rewrite these identities to show their relationships with well-known valuation models, and I explain in detail how they can be derived. In doing so, I explain the implications of these identities for accounting research. Finally, I discuss the relationships between research based on present-value identities and that based on the so-called valuation models.

1．はじめに

本稿は、会計分野における現在価値関係（present-value relations）に関する研究において基本となる現在価値恒等式（present-value identity）について説明する[1)]。具体的には、Campbell–Shillerの現在価値恒等式とVuolteenahoの現在価値恒等式を示し、その導出方法を説明する。特に、よく知られた企業価値評価モデルとの関係でいえば、Campbell–Shiller の現在価値恒等式は割引配当モデルに対応し、Vuolteenahoの現在価値恒等式は残余利益モデルに対応するもの

謝辞：本稿の内容を整理するにあたって、村宮克彦氏、小野慎一郎氏から貴重なコメントを頂いた。また、2016年２月13日に関西大学において開催されたPATW（Positive Accounting Theory Workshop）および2016年２月20日に東京大学において開催された現代会計フォーラムの参加者から貴重なコメントを頂いた。ここに記して感謝の意を表したい。なお、本稿における誤りはすべて筆者個人に帰するものである。本研究は、JSPS科研費15K03769、および文部科学省私立大学戦略的研究基盤形成支援事業（平成26年度－平成30年度）の助成を受けている。

連絡先：椎葉　淳　〒560-0043　大阪府豊中市待兼山町1-7（大阪大学大学院経済学研究科）
TEL：06-6850-5227　FAX：06-6850-5227　E-mail：shiiba@econ.osaka-u.ac.jp

と解釈できることを指摘する[2)]。これらの現在価値恒等式は、期待リターンが変動する状況を前提にしていること、および実証分析をおこなうことを念頭に変数の定常性を考慮して対数変換した変数を用いるとともに線形近似した式になっている点に特徴がある。

現在価値関係に関する会計研究は、Vuolteenaho（2000, 2002）によって会計情報に基づく現在価値恒等式が示されるとともに実証分析がおこなわれたことを契機に、近年増加してきている。それらの研究としては、(a)分散分解によって会計情報の情報内容を検証する研究（Callen and Segal 2004, Callen et al. 2005）、(b)資本コストに関する研究（Easton and Monahan 2005）、(c)集計した利益とリターンの関係についての研究（Sadka 2007）、(d)保守主義に関する研究（Callen et al. 2010, Callen and Segal 2013）などを指摘することができる[3)]。

しかしながら、Vuolteenaho（2000, 2002）の論文において基本となる簿価時価比率に関する式や期待外リターンに関する式[4)]は、一見すると会計研究における意味が理解しづらいこともあり、特に日本においてはあまり普及していないように思える[5)]。そこで本稿では、よく知られた企業価値評価モデルと対比できるように書きかえた式を示し、導出方法についても詳しく説明する。このことによって、Vuolteenahoの現在価値恒等式が会計研究に対して持つ重要性を説明することが本稿の目的である。

以下ではまず、第2節において、Campbell and Shiller（1988a）で示されたCampbell-Shillerの現在価値恒等式、すなわち対数変換した変数に基づく現在価値関係についての恒等式を導出する[6)]。続く第3節において、Vuolteenaho（2000, 2002）において示されたVuolteenahoの現在価値恒等式を導出する。これはCampbell-Shillerの現在価値恒等式を展開し、配当の代わりにクリーン・サープラス関係を仮定した利益（ROE）を用いてあらわしたものであり、企業価値評価モデルにおける割引配当モデルから残余利益モデルへの展開に対応している。第4節では追加的な仮定のもとで、Vuolteenahoの現在価値恒等式を展開した式を示す。これは残余利益の時系列を仮定して、その時点で利用可能な変数のみであらわしたOhlson（1995）のモデルと対応するものといえる。最後の第5節では本稿の内容を要約するとともに、Campbell-Shillerの現在価値恒等式やVuolteenahoの現在価値恒等式に基づく一連の研究と、割引配当モデル、残余利益モデルおよびOhlson（1995）のモデルに基づく一連の研究との関係について簡潔に述べる。

2．Campbell-Shillerの現在価値恒等式

この節では、Campbell and Shiller（1988a）で示されたCampbell-Shillerの現在価値恒等式、すなわち対数変換した変数に基づく現在価値関係についての恒等式について、その導出方法を示す。なお、ここでの証明は、主としてCochrane（2011b）を参考にしている。

2.1. Campbell-Shillerの現在価値恒等式とは

Campbell-Shillerの現在価値恒等式は次のようにあらわすことができる。

$$p_t \approx \frac{k}{1-\rho} + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1}((1-\rho)d_{t+j} - r_{t+j}) \qquad (1)$$

ここで、各変数は次のように定義している[7)]。

P_t：t期における株価

$p_t \equiv \ln(P_t)$

D_t：t期における配当

$d_t \equiv \ln(D_t)$

$$R_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

$r_t \equiv \ln(1+R_t)$

ρ ：１より小さい正の定数（以下で具体的に定義する）

k：定数（以下で具体的に定義する）

この式に基づき、Campbell（1991）は期待外リターンを次のようにあらわしている。

$$r_t - \mathrm{E}_{t-1}(r_t) \approx \Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j \Delta d_{t+j}\right) - \Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{t+j}\right) \tag{2}$$

ここで$\Delta\mathrm{E}_t$は、同一の確率変数についてのt期と$t-1$期における期待値の差、つまり$\mathrm{E}_t(\cdot)-\mathrm{E}_{t-1}(\cdot)$と定義する。また、他の変数についても$\Delta$は$t$期から$t-1$期を引く記号として用いる。

以下では、(1)式および(2)式を導出する。

2.2. 対数株式リターン

まず、対数配当利回りdp_tを次のように定義する。

$$dp_t \equiv \ln\left(\frac{D_t}{P_t}\right) = d_t - p_t$$

次に、グロスの対数株式リターンを次のように定義する[8]。

$$r_{t+1} \equiv \ln\left(\frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t}\right) \tag{3}$$

(3)式の株式リターンは次のように書きかえることができる[9]。

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= \ln\left(\frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_{t+1}} \times \frac{P_{t+1}}{P_t}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{D_{t+1}}{P_{t+1}}\right) + \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) \\ &= \ln(1 + \exp(dp_{t+1})) + \Delta p_{t+1} \end{aligned} \tag{4}$$

2.3. 線形近似

(4)式には非線形の項（$\ln(1+\exp(dp_{t+1}))$）がある が、テイラー展開することで線形近似をおこなう。なお、一次のテイラー展開は次のようである[10]。$f(x)$を微分可能な関数とする。このとき、xのある$\bar{x}$の値（基準点と呼ぶ）において、$f(x)$を次のように近似することができる。

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \xi$$

ここで、ξは近似誤差をあらわす。この式において$f(x)=\ln(1+\exp(x))$とすれば、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \ln(1 + \exp(x)) &= \ln(1 + \exp(\bar{x})) \\ &\quad + \frac{\exp(\bar{x})}{1 + \exp(\bar{x})}(x - \bar{x}) + \xi \end{aligned}$$

したがって、(4)式の非線形の項は、$\bar{x}=\overline{dp}$を基準点とすると、次のように近似することができる。ここで、$\overline{dp}$はdp_{t+1}の事前の期待値とする。あるいは、定常状態における値と解釈することもある[11]。

$$\begin{aligned} \ln(1 + \exp(dp_{t+1})) &= \ln(1 + \exp(\overline{dp})) \\ &\quad + \frac{\exp(\overline{dp})}{1 + \exp(\overline{dp})}(dp_{t+1} - \overline{dp}) + \xi_{t+1} \end{aligned} \tag{5}$$

ここで$\rho \equiv \frac{1}{1+\exp(\overline{dp})}(<1)$と定義する。なお、実証上は、$\rho$の値として、１より小さい１に近い値、たとえば0.96などが用いられている。これは、配当利回りの過去平均が、たとえばCampbell et al.（1996, Ch.7）では1926年から1994年までのアメリカのデータに基づき４％となっていることによる[12]。このとき、配当利回りの過去平均をD/Pとあらわせば、$\rho = \frac{1}{1+\exp(\overline{dp})} = \frac{1}{1+D/P} = \frac{1}{1+0.04} \approx 0.96$となる。$D/P$が４％とすると$\overline{dp} \approx -3.219$となる。図１は$y = \ln(1+\exp(dp_{t+1}))$と、この式を$\overline{dp} \approx$

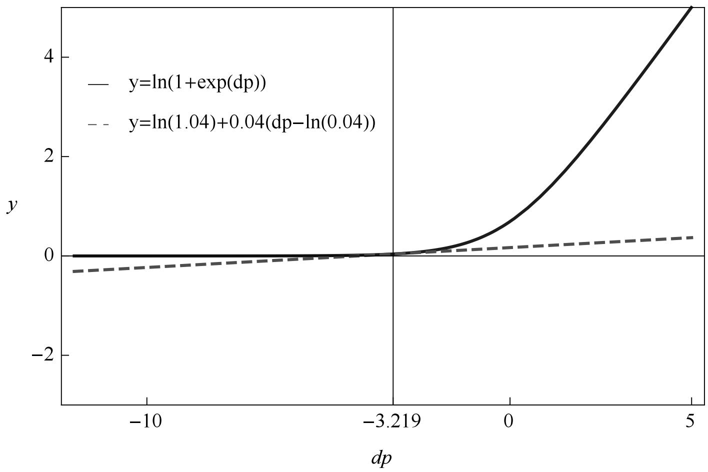

図1：y＝ln(1＋exp(dp_{t+1}))とその近似式

−3.219において線形近似した式を図示したものである。

次に、ρの定義から$\ln(1+\exp(\overline{dp}))=\ln(1/\rho)=-\ln\rho$が成り立つので、(5)式は次のように書きかえることができる。

$$\ln(1+\exp(dp_{t+1})) = -\ln\rho + (1-\rho)(dp_{t+1}-\overline{dp}) + \xi_{t+1}$$

また、ρの定義より、$\overline{dp}$は次のようにあらわすことができる。

$$1+\exp(\overline{dp}) = \frac{1}{\rho} \iff \overline{dp} = \ln\left(\frac{1}{\rho}-1\right)$$

これを代入すると、(5)式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\ln(1+\exp(dp_{t+1})) &= -\ln\rho + (1-\rho)dp_{t+1} \\ &\quad -(1-\rho)\ln\left(\frac{1}{\rho}-1\right) + \xi_{t+1} \\ &= k + (1-\rho)dp_{t+1} + \xi_{t+1}\end{aligned}$$

ここで$k\equiv-\ln\rho-(1-\rho)\ln(1/\rho-1)$である。

よって、(4)式は次のようにあらわすことができる。

$$\begin{aligned}r_{t+1} &= k + (1-\rho)dp_{t+1} + \Delta p_{t+1} + \xi_{t+1} \\ &= k - \rho dp_{t+1} + d_{t+1} - p_{t+1} + p_{t+1} - p_t + \xi_{t+1} \\ &= k - \rho dp_{t+1} + d_{t+1} - d_t + d_t - p_t + \xi_{t+1} \\ &= k - \rho dp_{t+1} + \Delta d_{t+1} + dp_t + \xi_{t+1} \qquad (6)\end{aligned}$$

この式は、対数株式リターンの定義式を線形化したものである。

2.4. 逐次代入

(6)式は次のように書きかえることができる。

$$dp_t = -k + \rho dp_{t+1} - \Delta d_{t+1} + r_{t+1} - \xi_{t+1} \qquad (7)$$

一期ずらした式を右辺のdp_{t+1}に代入すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}dp_t &= -k + \rho(-k + \rho dp_{t+2} - \Delta d_{t+2} + r_{t+2} - \xi_{t+2}) \\ &\quad - \Delta d_{t+1} + r_{t+1} - \xi_{t+1} \\ &= -\sum_{j=1}^{2}\rho^{j-1}k + \rho^2 dp_{t+2} - \sum_{j=1}^{2}\rho^{j-1}\Delta d_{t+j} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{2}\rho^{j-1}r_{t+j} - \sum_{j=1}^{2}\rho^{j-1}\xi_{t+j}\end{aligned}$$

繰り返し代入していくと次式を得る。

$$\begin{aligned}dp_t = &-\sum_{j=1}^{N}\rho^{j-1}k + \rho^N dp_{t+N} - \sum_{j=1}^{N}\rho^{j-1}\Delta d_{t+j} \\ &+ \sum_{j=1}^{N}\rho^{j-1}r_{t+j} - \sum_{j=1}^{N}\rho^{j-1}\xi_{t+j}\end{aligned}$$

$N\to\infty$とすると次式を得る。なお、$N\to\infty$のとき$\rho^N dp_{t+N}\to 0$を仮定している[13]。

$$dp_t = -\frac{k}{1-\rho} - \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1}\Delta d_{t+j} + \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1}r_{t+j} - \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1}\xi_{t+j}$$
$$\approx -\frac{k}{1-\rho} + \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1}(-\Delta d_{t+j} + r_{t+j}) \qquad (8)$$

(8)式の対数配当利回りdp_tに$d_t - p_t$を代入して、左辺がp_tになるように整理すると、次のようになる。

$$p_t \approx \frac{k}{1-\rho} + d_t + \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1}(\Delta d_{t+j} - r_{t+j})$$
$$= \frac{k}{1-\rho} + \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1}((1-\rho)d_{t+j} - r_{t+j}) \qquad (9)$$

これは(1)式のCampbell–Shillerの現在価値恒等式である。

なお、ρは線形近似をする際の基準点$\overline{dp}$に基づいて定義されたものであるが、上述のように1より小さい1に近い値であり、この(9)式に示されるように割引係数（discount coefficient）と解釈できる定数となっている（Campbell and Shiller 1988a, Vuolteenaho 2002, Campbell and Vuolteenaho 2004）。

2.5. 期待値をとる

(8)式および(9)式についてt期において期待値をとると、それぞれ次のようにあらわすことができる[14)]。

$$dp_t \approx -\frac{k}{1-\rho} + \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1}\mathrm{E}_t(-\Delta d_{t+j} + r_{t+j}) \qquad (10)$$

$$p_t \approx \frac{k}{1-\rho} + \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1}\mathrm{E}_t((1-\rho)d_{t+j} - r_{t+j}) \qquad (11)$$

(10)式は配当利回りdp_tが高くなるのは、将来の配当成長（Δd_{t+j}）が小さくなると予想されるときか、株式リターン（r_{t+j}）が高くなると予想されるときであることを意味している。この対数配当利回りdp_tを左辺とした(10)式は、実証において重要な式となっており、よく用いられている。その理由は、株価と配当は非定常となる可能性があるが、配当利回りdp_tと変数$(-\Delta d_{t+j} + r_{t+j})$は定常である可能性が高く、標準的な統計手法を適用できることにある。さらに、この式は将来の変数に対して線形であるので、配当利回りdp_tを含めたベクトル自己回帰（Vector Autoregressive; VAR）モデルを用いて、将来の収益率と配当成長率を予測することが1つの方法として考えられる[15)]。

また(11)式は、現在の株価が高くなるときは、将来の配当が高くなると予想されるときか、将来の株式リターンが低くなると予想されているときであることを意味している。

次に、(2)式の期待外リターンを導出する。まず、(8)式を1期ずらすと、dp_{t-1}は次のようにあらわすことができる。

$$dp_{t-1} \approx -\frac{k}{1-\rho} + \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1}(-\Delta d_{t+j-1} + r_{t+j-1})$$
$$= -\frac{k}{1-\rho} + \sum_{j=0}^{\infty}\rho^{j}(-\Delta d_{t+j} + r_{t+j}) \qquad (12)$$

(12)式の両辺をt期と$t-1$期において期待値をとると、それぞれ次のようになる。

$$dp_{t-1} \approx -\frac{k}{1-\rho} + \mathrm{E}_t\left(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{j}(-\Delta d_{t+j} + r_{t+j})\right) \qquad (13)$$

$$dp_{t-1} \approx -\frac{k}{1-\rho} + \mathrm{E}_{t-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{j}(-\Delta d_{t+j} + r_{t+j})\right) \qquad (14)$$

(13)式から(14)式を引くと次式を得る。

$$0 \approx \Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{j}(-\Delta d_{t+j} + r_{t+j})\right) \qquad (15)$$

この式は次のように書きかえることができる。

$$-\Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{j}\Delta d_{t+j}\right) + \Delta\mathrm{E}_t(r_t) + \Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j}r_{t+j}\right) \approx 0$$
$$\Longleftrightarrow\ r_t - \mathrm{E}_{t-1}(r_t) \approx \Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{j}\Delta d_{t+j}\right) - \Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j}r_{t+j}\right) \qquad (16)$$

この式は(2)式に等しい。この(16)式は、期待外株式リターンが大きくなることは、将来の配当成長の増加か将来の株式リターンの減少が予想されていることを意味している。

3．Vuolteenaho の現在価値恒等式

この節では、Vuolteenaho（2000, 2002）において示されたVuolteenahoの現在価値恒等式を導出する。Vuolteenahoの現在価値恒等式は、Campbell–Shillerの現在価値恒等式を展開し、配当の代わりにクリーン・サープラス関係を仮定した利益（ROE）を用いてあらわしたものである。

Vuolteenahoの現在価値恒等式は、残余利益モデルと同様、配当に関する変数がなく、したがってモデル化することが困難な企業の配当政策について考慮する必要がない点に特徴がある(Vuolteenaho 2002, p.234)。このことから、配当がゼロの可能性もある個別企業の株式リターンについて考察する際には、実証上より望ましい現在価値恒等式であると指摘されている（Cochrane 2011a, p.1101）[16)]。

なお、ここでの導出は、Vuolteenaho（2000, 2002）およびCohen et al.（2003）にしたがっている[17)]。また、付録では、Vuolteenaho（2000, 2002）の論文で示された式をそのまま示し、本文との整合性を確認している。

3.1. Vuolteenahoの現在価値恒等式とは

Vuolteenahoの現在価値恒等式は次のようにあらわすことができる。

$$p_t \approx b_t + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1}(roe_{t+j} - r_{t+j}) \tag{17}$$

ここで、各変数は次のように定義している。

P_t：t 期における株価

$p_t \equiv \ln(P_t)$

D_t：t 期における配当

$R_t \equiv \dfrac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$

$r_t \equiv \ln(1+R_t)$

B_t：t 期における株主資本簿価

$b_t \equiv \ln(B_t)$

X_t：t 期における利益

$roe_t \equiv \ln\left(1 + \frac{X_t}{B_{t-1}}\right)$

ρ ：1より小さい正の定数（以下で具体的に定義する）

また、Vuolteenaho（2000, 2002）における期待外リターンは次のようにあらわすことができる。

$$r_t - \mathrm{E}_{t-1}(r_t) \approx \Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j roe_{t+j}\right) - \Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{t+j}\right) \tag{18}$$

なお、第2節と同様に、$\Delta\mathrm{E}_t$は同一の確率変数についての t 期と $t-1$期における期待値の差、つまり$\mathrm{E}_t(\cdot) - \mathrm{E}_{t-1}(\cdot)$と定義する。

3.2. 対数株式リターンと対数会計リターン

まず、前節で定義した対数配当利回り$dp_t \equiv \ln\left(\dfrac{D_t}{P_t}\right) = d_t - p_t$に加えて、対数株主資本配当率$db_t$および対数簿価時価比率$bm_t$を次のように定義する。

$$db_t \equiv \ln\left(\frac{D_t}{B_t}\right) = d_t - b_t$$

$$bm_t \equiv \ln\left(\frac{B_t}{P_t}\right) = b_t - p_t = dp_t - db_t$$

次に、前節と同様に、グロスの対数株式リターンを次式で定義する。

$$r_{t+1} \equiv \ln\left(\frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t}\right) \tag{19}$$

また、グロスの対数会計リターン、すなわちグロスの対数ROEを次式で定義する。

$$roe_{t+1} \equiv \ln\left(1 + \frac{X_{t+1}}{B_t}\right)$$

ここで、次のクリーン・サープラス関係を仮定する。

$$B_{t+1} = B_t + X_{t+1} - D_{t+1} \tag{20}$$

このとき、会計リターンは次のようになる。

$$roe_{t+1} = \ln\left(\frac{B_{t+1} + D_{t+1}}{B_t}\right) \tag{21}$$

2.2節と同様に、(19)式の株式リターンは次のように書きかえることができる。

$$r_{t+1} = \ln(1 + \exp(dp_{t+1})) + \Delta p_{t+1} \tag{22}$$

同様に、(21)式の会計リターンは、株式リターンにおける$P_t(P_{t+1})$を$B_t(B_{t+1})$に置きかえたものであるから、次のように書きかえることができる。

$$roe_{t+1} = \ln(1 + \exp(db_{t+1})) + \Delta b_{t+1} \tag{23}$$

3.3. 線形近似

(22)式と(23)式には非線形の項があるが、テイラー展開することで線形近似をおこなう。具体的には、基準点$\bar{x}$としては、dp_{t+1}とdb_{t+1}の事前の期待値の加重平均、すなわち$\bar{x}=w\overline{dp}+(1-w)\overline{db}$とする。ここで$0<w<1$であり、$\overline{dp}$と$\overline{db}$はそれぞれ$dp_{t+1}$と$db_{t+1}$の事前の期待値とする[18]。このとき、$\ln(1+\exp(dp_{t+1}))$および$\ln(1+\exp(db_{t+1}))$は次のようにあらわすことができる。

$$\ln(1 + \exp(dp_{t+1})) = \ln(1 + \exp(\bar{x})) + \frac{\exp(\bar{x})}{1 + \exp(\bar{x})}(dp_{t+1} - \bar{x}) + \xi_{1t+1} \tag{24}$$

$$\ln(1 + \exp(db_{t+1})) = \ln(1 + \exp(\bar{x})) + \frac{\exp(\bar{x})}{1 + \exp(\bar{x})}(db_{t+1} - \bar{x}) + \xi_{2t+1} \tag{25}$$

ここで、$\rho \equiv \dfrac{1}{1 + \exp(\bar{x})}\,(<1)$と定義する[19]。

3.4. 配当に関する変数の消去

線形近似した2つの式から、次の関係を得る。ただし、$\xi_{t+1} \equiv \xi_{2t+1} - \xi_{1t+1}$としている。

$$\begin{aligned}\ln(1 + \exp(db_{t+1})) - \ln(1 + \exp(dp_{t+1})) &= (1-\rho)(db_{t+1} - dp_{t+1}) + \xi_{t+1} \\ &= -(1-\rho)bm_{t+1} + \xi_{t+1}\end{aligned}$$

最後の等号は$bm_{t+1}=dp_{t+1}-db_{t+1}$より成立する。なお、この式展開において、配当に関する変数を消去している。

(23)式から(22)式を引くと次のようになる。

$$\begin{aligned}roe_{t+1} - r_{t+1} &= \ln(1 + \exp(db_{t+1})) + \Delta b_{t+1} - \ln(1 + \exp(dp_{t+1})) - \Delta p_{t+1} \\ &= -(1-\rho)bm_{t+1} + \Delta b_{t+1} - \Delta p_{t+1} + \xi_{t+1} \\ &= -(1-\rho)bm_{t+1} + bm_{t+1} - bm_t + \xi_{t+1} \\ &= \rho bm_{t+1} - bm_t + \xi_{t+1}\end{aligned} \tag{26}$$

この(26)式は、対数株式リターンを線形化するとともに、同じく線形化した対数会計リターンを用いて、配当に関する変数を消去したものと解釈することができる[20]。つまり、(23)式に(25)式を代入し対数会計リターンを線形化し、db_{t+1}に含まれる配当d_{t+1}について解き、これを同じく(22)式に(24)式を代入し対数株式リターンを線形化した式のdp_{t+1}に含まれる配当d_{t+1}に代入して、配当に関する変数を消去していることに等しい。このことはまた、割引配当モデルから残余利益モデルを導出するときのように、クリーン・サープラス関係を用いて配当を直接に消去してはいないことを意味する[21]。そうではなく、Vuolteenaho(2000, 2002)の上記の証明では、対数株式リターンと(クリーン・サープラス関係を用いて変形した）対数

会計リターンを線形近似した後で配当に関する変数を消去できることを示している。

3.5. 逐次代入

(26)式は次のように書きかえることができる。

$$bm_t = r_{t+1} - roe_{t+1} + \rho bm_{t+1} + \xi_{t+1} \tag{27}$$

(27)式の一期ずらした式を右辺のbm_{t+1}に代入すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} bm_t &= r_{t+1} - roe_{t+1} + \rho(r_{t+2} - roe_{t+2} \\ &\quad + \rho bm_{t+2} + \xi_{t+2}) + \xi_{t+1} \\ &= \sum_{j=1}^{2} \rho^{j-1} r_{t+j} - \sum_{j=1}^{2} \rho^{j-1} roe_{t+j} \\ &\quad + \rho^2 bm_{t+2} + \sum_{j=1}^{2} \rho^{j-1} \xi_{t+j} \end{aligned}$$

繰り返し代入していくと次式を得る。

$$\begin{aligned} bm_t &= \sum_{j=1}^{N} \rho^{j-1} r_{t+j} - \sum_{j=1}^{N} \rho^{j-1} roe_{t+j} \\ &\quad + \rho^N bm_{t+N} + \sum_{j=1}^{N} \rho^{j-1} \xi_{t+j} \end{aligned} \tag{28}$$

$N \to \infty$とすると次式を得る。なお、$N \to \infty$のとき$\rho^N bm_{t+N} \to 0$と仮定している。

$$bm_t = \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1} r_{t+j} - \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1} roe_{t+j} + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1} \xi_{t+j} \tag{29}$$

$$\approx \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1} (r_{t+j} - roe_{t+j}) \tag{30}$$

(30)式の対数簿価時価比率bm_tに$b_t - p_t$を代入して、左辺がp_tになるように整理すると、次のようになる。

$$p_t \approx b_t + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1} (roe_{t+j} - r_{t+j}) \tag{31}$$

この(31)式はVuolteenahoの現在価値恒等式である(17)式に等しい[22]。

3.6. 期待値をとる

(30)式および(31)式についてt期において期待値をとると、それぞれ次のようにあらわすことができる。

$$bm_t \approx \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1} \mathrm{E}_t (r_{t+j} - roe_{t+j}) \tag{32}$$

$$p_t \approx b_t + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1} \mathrm{E}_t (roe_{t+j} - r_{t+j}) \tag{33}$$

(32)式は簿価時価比率bm_tが低くなる（PBRが高くなる）のは、将来の利益（roe_{t+j}）が大きくなると予想されるときか、株式リターン（r_{t+j}）が低くなると予想されるときであることを意味している。前節における対数配当利回りdp_tを左辺とした(10)式の議論と同様に、簿価時価比率bm_tを左辺とした(32)式は、実証において重要な式となっている。その理由は、簿価と時価は非定常となる可能性があるが、簿価時価比率bm_tと変数($r_{t+j} - roe_{t+j}$)は定常である可能性が高く、標準的な統計手法を適用できることにある[23]。さらに、この式は将来の変数に対して線形であるので、簿価時価比率bm_tを含めたVARモデルを用いて、将来の株式リターンと会計リターン（roe_{t+j}）を予測することが１つの方法として考えられる。

また(33)式は、現在の株価が高くなるときは、将来の会計リターンが高くなると予想されるときか、将来の株式リターンが低くなると予想されているときであることを意味している。

ここで、$rroe_t \equiv roe_t - r_t$と定義し、この$rroe_t$を対数変換した残余ROEと呼ぶ[24]。この残余ROEを用いると(33)式は次のようにあらわすことができる。

$$\begin{aligned} p_t &\approx b_t + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1} \mathrm{E}_t (rroe_{t+j}) \\ &= b_t + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j} \mathrm{E}_t (rroe_{t+j}) \end{aligned} \tag{34}$$

これは t 期における対数変換した株価 p_t が、t 期における対数変換した簿価 b_t と、ρ を割引率と解釈したときに $t+1$ 期以降の対数変換した残余ROEの t 期時点における割引現在価値合計に $1/\rho$ を乗じた値との和に等しくなることを示しており、残余利益モデルと形式的に似ている式といえる。

次に、(18)式の期待外リターンを導出する。まず、(31)式を1期ずらすと p_{t-1} について、次のようにあらわすことができる。

$$\begin{aligned} p_{t-1} &\approx b_{t-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1}(roe_{t+j-1} - r_{t+j-1}) \\ &= b_{t-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j}(roe_{t+j} - r_{t+j}) \end{aligned} \tag{35}$$

(35)式の両辺を t 期と $t-1$ 期において期待値をとると、それぞれ次のようになる。

$$p_{t-1} \approx b_{t-1} + \mathrm{E}_t\left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j}(roe_{t+j} - r_{t+j})\right) \tag{36}$$

$$p_{t-1} \approx b_{t-1} + \mathrm{E}_{t-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j}(roe_{t+j} - r_{t+j})\right) \tag{37}$$

(36)式から(37)式を引くと次式を得る。

$$0 \approx \Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j}(roe_{t+j} - r_{t+j})\right) \tag{38}$$

この式は次のように書きかえることができる。

$$\begin{aligned} &\Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j} roe_{t+j}\right) - \Delta\mathrm{E}_t(r_t) - \Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j} r_{t+j}\right) \approx 0 \\ \Longleftrightarrow\ & r_t - \mathrm{E}_{t-1}(r_t) \approx \Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j} roe_{t+j}\right) - \Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j} r_{t+j}\right) \end{aligned} \tag{39}$$

この式は(18)式に等しい[25)]。この(39)式は、期待外株式リターンが大きくなることは、将来の会計リターンの増加か将来の株式リターンの減少が予想されていることを意味している。

また、(39)式は次のようにあらわすことも多い。

$$r_t - \mathrm{E}_{t-1}(r_t) = Nroe_t - Nr_t \tag{40}$$

$$Nroe_t \equiv \Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j} roe_{t+j}\right) \tag{41}$$

$$Nr_t \equiv \Delta\mathrm{E}_t\left(\sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j} r_{t+j}\right) \tag{42}$$

ここで、$Nroe_t$ を利益ニュース（earnings news）、Nr_t を期待リターン・ニュース（expected return news）あるいは割引率ニュース（discount rate news）と呼ぶ[26)]。この(40)式によれば、期待外リターンは、利益ニュースと割引率ニュースのいずれかによって生じるといえる。この(40)式はまた、次のようにあらわすことができる。

$$r_t = \mathrm{E}_{t-1}(r_t) + Nroe_t - Nr_t \tag{43}$$

(43)式は、実現リターンを、期待リターン、利益ニュース、および割引率ニュースの3つに分けることができることを示しており、資本コストの研究などで用いられている[27)]。

3.7. 2つの現在価値恒等式を用いた導出

この節では、Vuolteenahoの現在価値恒等式を前節とは少し異なる方法によっても導出することができることを説明する[28)]。

まず、Campbell–Shillerの現在価値恒等式は次式であらわされた。

$$p_t \approx \frac{k_p}{1-\rho_p} + \sum_{j=1}^{\infty} \rho_p^{j-1}((1-\rho_p)d_{t+j} - r_{t+j}) \tag{44}$$

ただし、(1)式と同じ内容だが、ρ, k に添え字 p を付けている。たとえば、ρ_p は $\rho_p \equiv \frac{1}{1+\exp(\overline{dp})}$ である。なお、$\overline{dp}$ は対数配当利回り dp_t の事前の期待値である。

Campbell–Shillerの現在価値恒等式は、株式リターンの定義を変形して導出しているため、全く同じ手続きによって、会計リターンの定義を変形して株主資本簿価に関する現在価値恒等式を導出することができる。つまり、クリーン・サープラス関係を仮定すると、(19)式と(21)式を比較すると、会計リターンは株式リターンにおける株価$P_t(P_{t+1})$を簿価$B_t(B_{t+1})$に置きかえたものであることがわかる。したがって、Campbell–Shillerの現在価値恒等式におけるp_tをb_tに、r_tをroe_tにそれぞれ置きかえた次の式が成り立つ。なお、線形近似の際には、対数配当利回りdp_tの事前の期待値$\overline{dp}$ではなく、対数株主資本配当率db_tの事前の期待値$\overline{dp}$を基準点とし、ρ_p, k_pに対応する変数をそれぞれρ_b, k_bとあらわす。

$$b_t \approx \frac{k_b}{1-\rho_b} + \sum_{j=1}^{\infty} \rho_b^{j-1}((1-\rho_b)d_{t+j} - roe_{t+j}) \quad (45)$$

(44)式から(45)式を引いて、b_tを右辺に移項すると次のようになる。

$$\begin{aligned} p_t \approx{}& \frac{k_p}{1-\rho_p} - \frac{k_b}{1-\rho_b} + b_t \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\rho_p^{j-1}((1-\rho_p)d_{t+j} - r_{t+j}) \\ &- \rho_b^{j-1}((1-\rho_b)d_{t+j} - roe_{t+j})\Big) \end{aligned} \quad (46)$$

対数株式リターンおよび対数会計リターンを線形近似する際に、同じ基準点において近似したとすると、$\rho_p = \rho_b = \rho$ および$k_p = k_b = k$とおくことができる。同じ基準点としては、dp_tとdb_tの事前の期待値の加重平均、すなわち$\bar{x} = w\overline{dp} + (1-w)\overline{db}$とする。ここで$0 < w < 1$であり、$\overline{dp}$と$\overline{db}$はそれぞれ$dp_t$と$db_t$の事前の期待値とする。このとき、次のようにVuolteenahoの現在価値恒等式を導出することができる。

$$p_t \approx b_t + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{j-1}(roe_{t+j} - r_{t+j}) \quad (47)$$

前節のVuolteenaho (2000, 2002) の証明では、対数株式リターンと対数会計リターンを線形近似した後で配当に関する変数を消去できることを利用して証明している。これとは少し異なり、ここでの証明では、対数変換した株価に関するCampbell–Shillerの現在価値関係と対数変換した株主資本簿価に関する現在価値関係をそれぞれ導出した後から、配当に関する変数を消去し、同じ式を導出している。

4. Vuolteenahoの現在価値恒等式の展開

現在価値恒等式を用いた研究は、期待リターンが変動する状況を前提にしていること、および実証分析をおこなうことを念頭に変数の定常性を考慮して対数変換した変数を用いるとともに線形近似した式になっている点に特徴がある。特に、Vuolteenahoの現在価値恒等式は、クリーン・サープラス関係を仮定し、会計情報を用いた現在価値恒等式となっている点で会計研究においてもより注目すべきものであると考えられる。

Vuolteenahoの現在価値恒等式を用いた研究では、たとえばVuolteenaho (2002), Callen and Segal (2004) および Callen et al. (2005) などの分散分解を用いて会計情報の情報内容を検証している研究にみられるように、基礎となる変数の時系列としてVARモデルを仮定し、実証分析をおこなうことも多い。しかし、そのような設定では意味する内容が理解しづらいと考えられるため、ここではVuolteenahoの現在価値恒等式に、いくつかの単純な仮定をおいたときに得られる式を示し、Ohlson (1995) のモデルと対応する式を導出できることを示す。

4.1. 残余ROEがAR (1) にしたがうケース

まず、Ohlson (1995) における残余利益の時系列の仮定を参考にして、対数変換した残余

ROEが次の1次の自己回帰（first-order autoregression; AR(1)）にしたがうケースを考える[29]。ただし、ωは定数であり、$0<\omega<1$とする[30]。

$$rroe_{t+1} = \omega rroe_t + \varepsilon^{rroe}_{t+1} \tag{48}$$

ここで、ε^{rroe}_{t+1}は、期待値がゼロ、分散は有限の定数であり、異時点間の共分散はゼロと仮定する[31]。

(48)式を仮定すると、j期先の$rroe_{t+j}$の期待値は$E(rroe_{t+j}) = \omega^j rroe_t$とあらわすことができる。このとき、(33)式の期待値をとったVuolteenahoの現在価値恒等式は、次のようになる。

$$p_t \approx b_t + \frac{\omega}{1-\rho\omega} rroe_t \tag{49}$$

この(49)式は、t期における対数変換した株価p_tが、t期における対数変換した簿価b_tと、t期における対数変換した残余ROEである$rroe_t$についての線形の式であらわされることを示しており、残余利益の時系列を仮定してその時点で利用可能な変数のみであらわしたOhlson(1995)のモデルと対応するものといえる。

4.2. 残余ROE以外のその他の情報が存在するケース

次に、前節の設定に加えて、Ohlson（1995）におけるその他の情報（other information）も存在するケースを考える。ここで、その他の情報とは、残余ROE以外の変数であり、以下ではv_tとあらわす。具体的には、対数変換した残余ROEとその他の情報が次の時系列にしたがうケースを考える[32]。ただし、ω, γは定数であり、$0<\omega<1$, $0<\gamma<1$とする。

$$rroe_{t+1} = \omega rroe_t + v_t + \varepsilon^{rroe}_{t+1} \tag{50}$$

$$v_{t+1} = \gamma v_t + \varepsilon^{v}_{t+1} \tag{51}$$

ここで、ε^{rroe}_{t+1}およびε^{v}_{t+1}は、期待値がゼロ、分散は有限の定数であり、異時点間の共分散はゼロと仮定する。また、ε^{rroe}_tとε^{v}_tとの共分散も時点にかかわらずゼロと仮定する。このとき、Ohlson(1995)などと同様に展開すれば、j期先の$rroe_{t+j}$の期待値は次のようにあらわすことができる。

$$E(rroe_{t+j}) = \omega^j rroe_t + \frac{\gamma^j - \omega^j}{\gamma - \omega} v_t$$

このとき、(33)式の期待値をとったVuolteenahoの現在価値恒等式は、次のようになる。

$$p_t \approx b_t + \frac{\omega}{1-\rho\omega} rroe_t + \frac{1}{(1-\rho\gamma)(1-\rho\omega)} v_t \tag{52}$$

4.3. 会計リターンと株式リターンがそれぞれAR(1)にしたがうケース

残余ROEである$rroe_t$に関する仮定を少し変更し、roe_tとr_tは長期的には同一の値μに平均回帰するケースを考える[33]。ϕとκは定数であり、$0<\phi<1$かつ$0<\kappa<1$を満たすものとする。なお、ここではその他の情報はないケースを考える。

$$roe_{t+1} = \mu + \phi(roe_t - \mu) + \varepsilon^{roe}_{t+1} \tag{53}$$

$$r_{t+1} = \mu + \kappa(r_t - \mu) + \varepsilon^{r}_{t+1} \tag{54}$$

ここで、ε^{roe}_{t+1}およびε^{r}_{t+1}は期待値がゼロ、分散は有限の定数であり、異時点間の共分散はゼロと仮定する。また、ε^{roe}_tとε^{r}_tとの共分散も時点にかかわらずゼロと仮定する。このとき、j期先のroe_{t+j}とr_{t+j}の期待値はそれぞれ、$E(roe_{t+j}) = \mu + \phi^j(roe_t - \mu)$および$E(r_{t+j}) = \mu + \kappa^j(r_t - \mu)$とあらわすことができる。

したがって、(53)式と(54)式の時系列を仮定したとき、期待値をとったVuolteenahoの現在価値恒等式は次のようになる[34]。

$$p_t \approx b_t + \frac{\phi}{1-\rho\phi}(roe_t - \mu) - \frac{\kappa}{1-\rho\kappa}(r_t - \mu) \tag{55}$$

なお、この(55)式は、$\phi=\kappa=\omega$としたとき、(49)式に等しい。

5．おわりに

本稿では、Vuolteenahoの現在価値恒等式が会計研究に対して持つ意味をより明確に示すことを目的として、Campbell and Shiller（1988a）で示されたCampbell-Shillerの現在価値恒等式、およびVuolteenaho（2000, 2002）において示されたVuolteenahoの現在価値恒等式について、よく知られた企業価値評価モデルと対比できるように書きかえた式を示し、その導出方法について詳しく説明してきた。これらの現在価値恒等式は、期待リターンが変動する状況を前提にしていること、および実証分析をおこなうことを念頭に変数の定常性を考慮して対数変換した変数を用いるとともに線形近似した式になっている点に特徴がある。特に、Vuolteenahoの現在価値恒等式は、これらの望ましい特徴を有するとともに、会計情報に基づいた式であることから、今後ますます会計研究において重要になってくると予想される。

最後に、Campbell-Shillerの現在価値恒等式やVuolteenahoの現在価値恒等式に基づく一連の研究と、割引配当モデル、残余利益モデルおよびOhlson(1995)のモデルに基づく一連の研究との関係についてふれておく。前者と後者の最大の違いは、基本となる式が、前者は配当やリターンを対数変換した変数を用いてあらわされているのに対して、後者は対数変換せずにそのままの変数であらわされていることである。Cochrane(2011b)はCampbell-Shillerの現在価値恒等式が有用な理由として、期待リターンが変動するときにも線形であらわすことができ、線形の時系列モデルを利用して実証分析をおこなうことができることを指摘している[35]。一方で、割引配当モデルは期待リターンが変動するときには複雑になるとしている。しかし、これだけでは一概には優劣を決めることはできないと考えられる。たとえば、Lyle et al.(2013)は、期待リターンが変動する状況にOhlson(1995)のモデルを実証可能なかたちで拡張し[36]、実証分析をおこなっている。つまり、現時点で一方が他方よりもある側面で有用であると考えられたとしても、今後の研究によってはその優劣が変わる可能性も残されている。また、ある目的には残余利益モデルがより有用であり、別の目的にはVuolteenahoの現在価値恒等式がより有用であるということになるかもしれない。さらに、Callen et al.(2005)およびCallen(2009)が指摘するように、価値関連性研究[37]とVuolteenahoの現在価値恒等式を利用した分散分解に基づく利益の情報内容に関する研究は、補完的な研究と捉えるべきかもしれない[38]。このような両者の研究の比較については、Lyle et al.(2013, p.906)も指摘しているように、現時点では会計研究における（重要な）未解決の問題といえるだろう。ただし、こういった比較検討をする際にも、本稿の内容がその基礎となる知識を提供することを期待している。たとえば、Penman and Yehuda(2015)は対数変換していないそのままの変数であらわされる式に基づいて実証分析をおこなうとともに、"Vuolteenaho framework"との関係について議論している[39]。このとき、Penman and Yehuda(2015)における"Vuolteenaho framework"とは、Vuolteenahoの現在価値恒等式ではなく、対数変換した会計リターン(*roe*)などの変数に関するVARモデルを意味している[40]。Penman and Yehuda(2015)の指摘について検討することは本稿の範囲を超えているが、本稿におけるVuolteenahoの現在価値恒等式についての説明は、こういった議論を正確に理解するための前提となる知識を提供することにもなると考える。

付録

A．Vuolteenaho（2000, 2002）の恒等式

この付録では、参考のために、Vuolteenaho（2000, 2002）の論文で示された主要な式である(2)式および(3)式を、Vuolteenaho（2000, 2002）の論文と同じ記号と定義を用いて示すとともに、本文において示した式と本質的に同じであることを示しておく。なお、この付録の一部の記号は本文における定義と異なっていることには注意してほしい。

Vuolteenaho（2002, p.235）の(2)式は $t-1$期における対数変換した簿価時価比率(θ_{t-1})に関する恒等式であり、次のようである。また、この式はVuolteenaho（2000, p.7）における(8)式に対応している。

$$\theta_{t-1} = k_{t-1} + \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j r_{t+j} - \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j(e_{t+j} - f_{t+j}) \qquad (A.1)$$

また、Vuolteenaho（2002, p.236）の(3)式は期待外リターンに関する恒等式であり、次のようである。

$$r_t - \mathrm{E}_{t-1}r_t = \Delta\mathrm{E}_t\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j(e_{t+j} - f_{t+j}) - \Delta\mathrm{E}_t\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{t+j} + \kappa_t \qquad (A.2)$$

ここで、各変数は次のように定義している。

B_t：t期における株主資本簿価

$b_t \equiv \log(B_t)$

D_t：t期における配当

$d_t \equiv \log(D_t)$

X_t：t期における利益

$e_t \equiv \log\left(1 + \frac{X_t}{B_{t-1}}\right)$

M_t：t期における株価

$m_t \equiv \log(M_t)$

$\theta_t \equiv \log\left(\frac{B_t}{M_t}\right)$

F_t：t期における無リスク利子率

$f_t \equiv \log(1+F_t)$

$R_t \equiv \frac{M_t + D_t - M_{t-1}}{M_{t-1}} - F_t$

$r_t \equiv \log(1 + R_t + F_t) - f_t$

ρ：1より小さい正の定数

k_{t-1}：$t-1$期における近似誤差

$\kappa_t \equiv -\Delta\mathrm{E}_t(k_{t-1})$

なお、$\Delta\mathrm{E}_t$は、同一の確率変数についてのt期と$t-1$期における期待値の差、つまり$\mathrm{E}_t(\cdot) - \mathrm{E}_{t-1}(\cdot)$であり本文と同じ定義である。

まず、Vuolteenaho（2002）ではr_tを対数超過リターンとしている。これをr_t^{vol}とあらわすと、本文のr_tとの関係は、$r_t = r_t^{\mathrm{vol}} + f_t$である。また、Vuolteenaho（2002）におけるe_tは本文におけるroe_tに等しく、これは記号が異なるのみである。同様に、Vuolteenaho（2002）におけるθ_{t-1}は本文におけるbm_tである。さらに、Vuolteenaho（2002）における$t-1$期における近似誤差k_{t-1}は、本文におけるξ_tを用いて$\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\xi_{t+j}$とあらわすことができる。したがって、本文における記号に置きかえると、(A.1)式は次のようになる。

$$bm_{t-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\xi_{t+j} + \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j r_{t+j} - \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j roe_{t+j} \qquad (A.3)$$

左辺をt時点のbm_tにすると、次のようになる。

$$\begin{aligned} bm_t &= \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\xi_{t+j+1} + \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j r_{t+j+1} - \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j roe_{t+j+1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1}\xi_{t+j} + \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1} r_{t+j} - \sum_{j=1}^{\infty}\rho^{j-1} roe_{t+j} \qquad (A.4) \end{aligned}$$

この(A.4)式は、本文の(29)式に等しい。

なお、(A.2)式のVuolteenaho（2002）における期待外リターンに関する恒等式も同じようにすれば、本文の(18)式に等しいことがわかる。

《注》

1）現在価値恒等式（present-value identity）という表現はCampbell et al.（1996, Ch.7）、Cochrane（2005, Ch.20）、Cochrane（2011a,b）などにしたがっている。以下で説明するように導出の過程で線形近似をおこなっているため、近

似誤差を無視した場合には、近似的な現在価値恒等式（approximate present-value identity）などと呼ぶべきものであるが（Cochrane 2011a）、表現を簡潔にするために本文では「近似的な」という語は省略している。なお、ファイナンス分野における現在価値関係に関する研究のサーベイについては Campbell et al.（1996, Ch.7）、Cuthbertson and Nitzsche（2004, Ch.7-9）およびCochrane（2005, Ch. 20）などを参照してほしい。

2）Vuolteenahoの現在価値恒等式が残余利益モデルに対応することは、公表されたVuolteenaho（2002）には記述はないが、Vuolteenaho（2000）においては示唆されている。また Campbell（2000, p.1533）も同様の指摘をしている。

3）(a)の内容を紹介・解説した論文として、Callen（2009）、Callen and Segal（2010）、Callen（2015, 2016）がある。本文で引用した研究以外には、Callen et al.（2006）、Clatworthya et al.（2012）、Shan et al.（2014）、Callen et al.（2016）などがあり、日本企業のデータを用いた研究としては吉田（2005）、Okuda and Shiiba（2010）がある。また、(b)の内容を紹介・解説した論文として、Callen（2015）、Easton and Monahan（2016）、小野（2014）がある。本文で引用した研究以外には、Botosan et al.（2011）、Chattopadhyay et al.（2015）、Lyle and Wang（2015）などの関連する研究があり、日本企業のデータを用いた研究として小野（2015）、小野・村宮（2016）がある。次に、(c) に関連した内容を紹介・解説した論文として、Ball and Sadka（2015）、中野（2012）、中野・吉永（2017）、吉永（2017）がある。本文で引用した研究以外には、Ball et al.（2009）、Patatoukas（2014）、Chue（2015）、Crawley（2015）などの関連する研究があり、日本企業のデータを用いた関連する研究としてはYoshinaga（2016）がある。さらに、(d)の内容を紹介・解説した論文としてはCallen and Segal（2013）がある。本文で引用した研究以外には García Lara et al.（2011）などがある。これらの（a）–（d）以外にも、Goto et al.（2009）、Shan et al.（2013）なども、関連する研究といえる。

4）本稿の付録の（A.1）式や（A.2）式などである。

5）例外として、福井（2008）において詳しく解説されている。また、会計研究において変動する割引率を考慮することの重要性については、福井（2008）に加えて福井（2015）なども参照のこと。なお、Campbell and Shiller（1988a）で示された Campbell–Shillerの現在価値恒等式に基づいた Campbell（1991）の分散分解を日本の株式市場において検証した研究として青野（2008）がある。そこでは日本の株式市場において Campbell（1991）の分散分解を用いた最初の論文であると指摘されており（青野 2008, p.24）、ファイナンス分野においても日本ではあまり研究がおこなわれていないようである。

6）密接に関連した論文としてCampbell and Shiller（1988b）もある。

7）より正確には、P_tはt期における株式時価総額である。本稿では表現を簡潔にするため株価としている。

8）これは次式を満たすことから、連続複利の株式リターンである。

$$\exp(r_{t+1}) = \frac{P_{t+1} + D_{t+1}}{P_t}$$

9）Campbell et al.（1996）にしたがっている。なお、$r_{t+1} = \ln(1 + \exp(-dp_{t+1})) + \Delta d_{t+1} + dp_t$とあらわしても、同様の展開をすることができる。

10）テイラー展開については、たとえば尾山・安田（2013, 5.9節）を参照。ただし、尾山・安田（2013, p.155）は、$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x})$は微分の式であり、形式的には微分は１次のテイラー展開とみなすことができるとしつつも、微分の式を１次のテイラー展開と呼ぶべきではないとしている。また、対数線形近似については磯貝（2014）も参考になる。

11）磯貝（2014）および清水（2016）など参照。

12）$f(x)$を$\bar{x}$の値において線形近似するとき、近似誤差は$\bar{x}$に近いほど小さい。このことから、近似誤差を小さくするために、dp_{t+1}の過去の平均値を基準点として近似することが考えられる。なお、Cochrane（2005, 2011a）も $\rho = 0.96$を用いている。Campbell（1991, p.178）では1927年から1988年のデータを用いているが、サンプル平均として $\rho = 0.9962$を用いている。また、青野（2008）は1970年から2005年までの日本企業のデータを用いているが、サンプル平均として $\rho = 0.9863$を用いるとしている（青野 2008, p.30）。

13）この条件についてはCochrane（2005, pp.401-404）において考察されている。

14）期待値をとるという操作は厳密には背後にモデルを想定する（いくつかの仮定をする）ことになる。この点は Cuthbertson and Nitzsche（2004, Ch.7）および福井（2008）の第３章第７節において説明がなされている。

15）この点の説明はCuthbertson and Nitzsche（2004, Ch.9）などにある。

16）Campbell（2000, p.1532）においても指摘されている。

17）Vuolteenahoの現在価値恒等式の導出は、福井（2008）によっても詳しく説明されている。以下では、脚注において、福井（2008）において示されている式とも整合的であることを確認している。また、Callen（2009）およびCallen and Segal（2010）においてもVuolteenaho（2000）と同じ方法で証明が示されている。さらに、Lyle and Wang(2015) も最初に簿価時価比率を示しそこから変形して同じ式を導出しているが、同一の方法である。

18）$f(x)$をxのある$\bar{x}$の値において線形近似するとき、近似誤差は$x \approx \bar{x}$であるとき小さい。このことから、近似誤差を小さくするためには、株式リターンと会計リターンの式における非線形の項においてこのxに対応するdp_{t+1}とdb_{t+1}について、それぞれ過去の平均値を基準点として近似することが考えられる。さらに、同じ基準点において近似したいため、dp_{t+1}とdb_{t+1}の過去の平均値の加重平均を基準点として近似している。

19）なお、前節とは基準点$\bar{x}$の定義が異なるため、ρの定義も異なっている。

20）福井（2008, p.80）はこれを「対数線形化された残余ROE

モデル」と呼んでいる。なお、福井（2008）は本稿におけるbm_t変数ではなく$pbr_t \equiv p_t - b_t = -(b_t - p_t) = -bm_t$と定義される$pbr_t$変数を用いている。

21）この点はCallen et al.（2005, p.386）の脚注16などにおいて指摘されている。

22）Easton and Monahan（2005, p.533）では対数変換された簿価時価比率（本稿におけるbm_t）を左辺とした同様の式が示されており、福井（2008, p.82）では対数変換された時価簿価比率（$pbr_t \equiv p_t - b_t$）を左辺とした同様の式が示されている。

23）この点は福井（2008, pp.80-81）にも分かりやすい説明がある。

24）ここでの$rroe_t$は、福井（2008, p.78）においても「連続複利ベースの残余ROE」と呼ばれている。

25）福井（2008, p.87）との整合性を確認しておく。(39)式の右辺第１項の$j = 0$について、次のようにあらわすことができる。

$$
\begin{aligned}
\rho^0 \Delta \mathrm{E}_t(roe_t) &= \Delta \mathrm{E}_t(roe_t) \\
&= \mathrm{E}_t(roe_t) - \mathrm{E}_{t-1}(roe_t) \\
&= roe_t - \mathrm{E}_{t-1}(roe_t)
\end{aligned}
$$

したがって、(39)式は次のように書きかえることができる。

$$
\begin{aligned}
r_t - \mathrm{E}_{t-1}(r_t) &\approx \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \Delta \mathrm{E}_t(roe_{t+j}) - \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \Delta \mathrm{E}_t(r_{t+j}) \\
&= roe_t - \mathrm{E}_{t-1}(roe_t) + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \Delta \mathrm{E}_t(roe_{t+j}) - \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \Delta \mathrm{E}_t(r_{t+j}) \\
&= roe_t - \mathrm{E}_{t-1}(roe_t) + \Delta \mathrm{E}_t\left(\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j (roe_{t+j} - r_{t+j})\right)
\end{aligned}
$$

これは１期ずらせば、具体的にはtを$t+1$に置きかえれば、福井（2008, p.87）の表現に等しい。

26）Vuolteenaho（2002）は、キャッシュ・フローの代理変数として会計利益を用いているとの立場から、ここでの利益ニュースをキャッシュ・フロー・ニュース（cash-flow news）と呼んでいる。

27）たとえば、Easton and Monahan（2005, p.504）の（1）式、Botosan et al.（2011, p.1087）の（1）式および（2）式、Larocque（2013, p.151）の（11）式など参照。

28）この証明は Muramiya and Shiiba(2016)にしたがっている。

29）ただし、対数変換した変数についての時系列を仮定した場合には、Ohlson（1995）が強調しているMiller and Modigliani（1961）などとの整合性を考慮する場合には問題になるかもしれない。この点はLyle and Wang（2015, p.508）、Penman and Yehuda（2015）、Penman（2016）、およびLyle（2016）などでも議論されており、現時点では未解決の問題といえる。本稿の第５節も参照のこと。

30）このときこの時系列は定常（stationary）となる。

31）異時点間の共分散とはCov$(\varepsilon_t^{rroe}, \varepsilon_{t-s}^{rroe})$（$s = \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots$）のことであり、自己共分散とも呼ばれる。このとき自己相関もゼロとなり、系列相関のない確率過程となる。

32）ここではCallen（2009）およびShan et al.（2014）を参考にしている。

33）Lyle and Wang（2015）を参考にしている。ただし、Lyle and Wang（2015）は期待値をとった変数についての時系列を仮定しているのに対して、ここでは例示のためにより単純な実現値についての時系列を仮定している。なお、実現値についての時系列と期待値をとった変数についての時系列との関係については、Cochrane（2008）において議論されている。

34）この(55)式は、Lyle and Wang（2015）の(6)式に対応している。ただし、脚注33）で指摘したようにLyle and Wang（2015）とは少し設定が異なっている。

35）Campbell（2000, pp.1530-1531）も同様の指摘をしている。また、福井（2008, pp.76-77）においても詳しく説明されている。

36）より正確にはFeltham and Ohlson（1999）をベースにしている。このLyle et al.（2013）の研究はCallen（2016）および小野（2014）において説明されている。

37）価値関連性研究における検証式は、しばしばOhlson（1995）のモデルを理論的根拠としている。この点については、たとえば薄井（1999）、太田（2003）、大日方（2013）の第９章、および薄井（2015）の第６章などを参照のこと。

38）資本コストの研究においても、残余利益モデル等に基づいてインプライド資本コストを推定する一方で、複数の方法による推定値を比較・評価する際には、Vuolteenahoの現在価値恒等式の含意を考慮している研究もある（Easton and Monahan 2005, Botosan et al. 2011, Larocque 2013）。

39）Penman（2016）およびLyle（2016）も参考のこと。

40）本稿の数式でいえば、(17)式のVuolteenahoの現在価値恒等式や(18)式の期待外リターンに関する式ではなく、会計リターン（roe_t）の時系列をあらわした(53)式を意味している。なお、両者を区別せず理解することは、Ohlson（2001, p.114）の脚注２などで指摘されている、残余利益モデルと残余利益の時系列を仮定して導出したOhlson（1995）のモデルとの混同と似ている。

《参考文献》

青野幸平，2008.「日本の株式市場の予測可能性」，『現代ファイナンス』，第24巻，23-43.

Ball, R., Sadka, G., 2015. Aggregate earnings and why they matter, Journal of Accounting Literature 34, 39-57.

Ball, R., Sadka, G., Sadka, R., 2009. Aggregate earnings and asset prices, Journal of Accounting Research 47（5），1097-1133.

Botosan, C. A., Plumlee, M. A., Wen, H., 2011. The relation between expected returns, realized returns, and firm risk characteristics, Contemporary Accounting Research 28(4)，1085-1122.

Callen, J. L., 2009. Shocks to shocks: A theoretical foundation for the information content of earnings, Contemporary

Accounting Research 25（1），135–166.
Callen, J. L., 2015. A selective critical review of financial accounting research, Critical Perspectives on Accounting 26, 157–167.
Callen, J. L., 2016. Accounting valuation and cost of equity capital dynamics, ABACUS 52（1），5–25.
Callen, J. L., Segal, D., 2004. Do accruals drive firm-level stock returns? A variance decomposition analysis, Journal of Accounting Research 42（3），527–560.
Callen, J. L., Segal, D., 2010. A variance decomposition primer for accounting research, Journal of Accounting, Auditing & Finance 25（1），121–142.
Callen, J. L., Segal, D., 2013. An analytical and empirical measure of the degree of conditional conservatism, Journal of Accounting, Auditing & Finance 28（3），215–242.
Callen, J. L., Hope, O.-K., Segal, D., 2005. Domestic and foreign earnings, stock return variability, and the impact of investor sophistication, Journal of Accounting Research 43（3），377–412.
Callen, J. L., Livnat, J., Segal, D., 2006. The information content of SEC filings and information environment: A variance decomposition analysis, The Accounting Review 81（5），1017–1043.
Callen, J. L., Segal, D., Hope, O.-K., 2010. The pricing of conservative accounting and the measurement of conservatism at the firm-year level, Review of Accounting Studies 15（1），145–178.
Callen, J. L., Lai, K., Wei, S. X., 2016. The volatility of return revisions and financial statement literacy in emerging markets: The case of cross-listed chinese firms, Journal of Business Finance & Accounting 43（5）&（6），572–596.
Campbell, J. Y., 1991. A variance decomposition for stock returns, The Economic Journal 101（405），157–179.
Campbell, J. Y., 2000. Asset pricing at the millennium, The Journal of Finance 55（4），1477–1900.
Campbell, J. Y., Shiller, R. J., 1988a. The dividend-price ratio and expectations of future dividends and discount factors, Review of Financial Studies 1（3），195–228.
Campbell, J. Y., Shiller, R. J., 1988b. Stock prices, earnings, and expected dividends, Journal of Finance 43（3），661–676.
Campbell, J. Y., Vuolteenaho, T., 2004. Bad beta, good beta, American Economic Review 94（5），1249–1275.
Campbell, J. Y., Lo, A. W., MacKinlay, A. C., 1996. The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press.（祝迫得夫，大橋和彦，中村信弘，本多俊毅，和田賢治訳．2003.『ファイナンスのための計量分析』，共立出版）.
Chattopadhyay, A., Lyle, M. R., Wang, C. C. Y., 2015. Accounting data, market values, and the cross section of expected returns worldwide. Harvard Business School Accounting & Management Unit Working paper No. 15-092. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=2613366.
Chue, T. K., 2015. Understanding cross-country differences in valuation ratios: A variance decomposition approach, Contemporary Accounting Research 32（4），1617–1640.
Clatworthya, M. A., Pong, C. K. M., Wong, W. K., 2012. Auditor quality effects on the relationship between accruals, cash flows and equity returns: A variance decomposition analysis, Accounting and Business Research 42（4），419–439.
Cochrane, J. H., 2005. Asset Pricing, Revised edition, Princeton University Press.
Cochrane, J. H., 2008. State-space vs. VAR models for stock returns. Manuscript, July 24, 2008. Available at http://faculty.chicagobooth.edu/john.cochrane/research/（最終閲覧日2017年5月3日）.
Cochrane, J. H., 2011a. Presidential address: Discount rates, The Journal of Finance 66（4），1047–1108.
Cochrane, J. H., 2011b. Predictability notes. Lecture Note（Empiri-cal Asset Pricing, University of Chicago, Winter 2011）. Available at http://faculty.chicagobooth.edu/john.cochrane/teaching/Empirical Asset Pricing/（最終閲覧日2017年5月3日）.
Cohen, R. B., Polk, C., Vuolteenaho, T., 2003. The value spread, The Journal of Finance 58（2），609–642.
Crawley, M. J., 2015. Macroeconomic consequences of accounting: The effect of accounting conservatism on macroeconomic indicators and the money supply, The Accounting Review 90（3），987–1011.
Cuthbertson, K., Nitzsche, D., 2004. Quantitative Financial Economics: Stocks, Bonds and Foreign Exchange, 2nd edition, Wiley.（吉野直行監訳，菅原周一・上木原さおり訳．2013.『ファイナンスの基礎理論―株式・債券・外国為替』，慶應義塾大学出版会）.
Easton, P. D., Monahan, S. J., 2005. An evaluation of accounting-based measures of expected returns, The Accounting Review 80（2），501–538.
Easton, P. D., Monahan, S. J., 2016. Review of recent research on improving earnings forecasts and evaluating accounting-based estimates of the expected rate of return on equity capital, ABACUS 52（1），35–58.
Feltham, G. A., Ohlson, J. A., 1999. Residual earnings valuation with risk and stochastic interest rates, The Accounting Review 74（2），165–183.
福井義高，2008.『会計測定の再評価』，中央経済社.
福井義高，2015.「見つかりかけた忘れもの：概念フレームワークと変動する割引率」，『企業会計』，第67巻，第9号，25–32.
García Lara, J. M., García Osma, B., Penalva, F., 2011. Conditional conservatism and cost of capital, Review of Accounting Studies 16（2），247–271.
Goto, S., Watanabe, M., Xu, Y., 2009. Strategic disclosure and stock returns: Theory and evidence from US cross-listing,

Review of Financial Studies 22（4），1585–1620.
磯貝茂樹，2014.「対数線形近似」．メモ．2014年 4 月13日．Available at https://sites.google.com/site/shigekiisogai/japanese（最終閲覧日2017年 5 月 3 日）．
Larocque, S., 2013. Analysts' earnings forecast errors and cost of equity capital estimates, Review of Accounting Studies 18（1），135–166.
Lyle, M. R., 2016. Valuation: Accounting for risk and the expected return. Discussion of Penman, ABACUS 52（1），131–139.
Lyle, M. R., Wang, C., 2015. The cross section of expected holding period returns and their dynamics: A present value approach, Journal of Financial Economics 116（3），505-525.
Lyle, M. R., Callen, J. L., Elliott, R. J., 2013. Dynamic risk, accounting-based valuation, and firm fundamentals, Review of Accounting Studies 18（4），899–929.
Miller, M. H., Modigliani, F., 1961. Dividend policy, growth, and the valuation of shares, The Journal of Business 34(4)，411–433.
Muramiya, K., Shiiba, A., 2016. What moves firm values? 日本ディスクロージャー研究学会，第 1 回JARDIS Workshop，2016年 3 月21日報告論文．
中野誠，2012.「マクロ実証会計研究への挑戦」，『会計』，第182巻，第 1 号，28–38.
中野誠・吉永裕登，2017.「マクロ実証会計研究への挑戦」．中野誠編『マクロとミクロの実証会計』中央経済社，第 4 章，47–55.
大日方隆，2013.『アドバンスト財務会計（第 2 版）』，中央経済社．
Ohlson, J. A., 1995. Earnings, book values, and dividends in equity valuation, Contemporary Accounting Research 11（2），661–687.
Ohlson, J. A., 2001. Earnings, book values, and dividends in equity valuation: An empirical perspective, Contemporary Accounting Research 18（1），107–120.
Okuda, S., Shiiba, A., 2010. An evaluation of the relative importance of parent-only and subsidiary earnings in Japan: A variance decomposition approach, Journal of International Accounting Research 9（1），39–54.
小野慎一郎，2014.「時間的に変動する株主資本コストの推計方法」，『大分大学経済論集』，第66巻，第 4 号，55–76.
小野慎一郎，2015.「株主資本簿価／時価比率とROEを用いた資本コストの推計：日本企業のデータによるLyle-Wangモデルの検証」．日本経営財務研究学会，第39回全国大会，2015年10月 3 日報告論文．
小野慎一郎・村宮克彦，2016.「クリーン・サープラス関係を利用した時間的に変動する期待リターンの推計」．日本会計研究学会，第75回大会，2016年 9 月13日報告論文．
太田浩司，2003.「価値関連研究におけるモデル特定化問題」，『関西大学商学論集』，第48巻，第 2 号，95–128.
尾山大輔・安田洋祐，2013.『［改訂版］経済学で出る数学』，日本評論社．
Patatoukas, P. N., 2014. Detecting news in aggregate accounting earnings: Implications for stock market valuation, Review of Accounting Studies 19（1），134–160.
Penman, S. H., 2016. Valuation: Accounting for risk and the expected return, ABACUS 52（1），106–130.
Penman, S. H., Yehuda, N., 2015. A matter of principle: Accounting reports convey both cash-flow news and discount-rate news. Columbia Business School Research Paper No. 14-16. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=2406389.
Sadka, G., 2007. Understanding stock price volatility: The role of earnings, Journal of Accounting Research 45（1），199–228.
Shan, Y., Taylor, S., Walter, T., 2013. Fundamentals or managerial discretion? The relationship between accrual volatility and future stock return volatility, ABUCUS 49（4），441–475.
Shan, Y., Taylor, S., Walter, T., 2014. The role of "other information" in analysts' forecasts in understanding stock return volatility, Review of Accounting Studies 19（4），1346–1392.
清水克俊，2016.『金融経済学』，東京大学出版会．
吉田和生，2005.「利益情報と株式リターンの分散分解分析」，『会計プログレス』，第 6 巻，59–70.
薄井彰，1999.「クリーンサープラス会計と企業の市場評価モデル」，『會計』，第155巻，第 3 号，394–409.
薄井彰，2015.『会計制度の経済分析』，中央経済社．
Vuolteenaho, T., 2000. Understanding the aggregate book-to-market ratio and its implications to current equity-premium expectations, Working paper, Harvard University.
Vuolteenaho, T., 2002. What drives firm-level stock returns? The Journal of Finance 57（1），233–264.
Yoshinaga, Y., 2016. Market-wide cost of capital impacts on the aggregate earnings-returns relation: Evidence from Japan, The Japanese Accounting Review 6, 95–122.
吉永裕登，2017.「集約レベルの利益・リターン関係に関する一考察」．中野誠編『マクロとミクロの実証会計』中央経済社，第 5 章，57–74.